TD 33 : Déterminants Indications

Formes bilinéaires

1 ★☆ Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ définie par $f(A,B) = \mathrm{Tr}(A)\,\mathrm{Tr}(B) - \mathrm{Tr}(AB)$.

1) Montrer que f est une forme bilinéaire.
2) Est-ce que f est alternée ?

2) À noter : f alternée équivaut à f antisymétrique...

2 ★★ Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. et B une forme bilinéaire définie sur E. Montrer que B se décompose de manière unique en la somme d'une forme bilinéaire S symétrique et d'une forme bilinéaire A antisymétrique.
Raisonner par analyse-synthèse.

Calcul de déterminants

3 ★ Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 9 \\ 3 & 9 & 28 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

4 ★☆ Calculer les déterminants suivants (avec $a \in \mathbb{C}$) :

$$1)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad 2)\ \begin{vmatrix} 1 & i & -1 & -i \\ i & 1 & i & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & i & 1 \end{vmatrix}$$

$$3)\ \begin{vmatrix} a & 2 & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & 2 & a \end{vmatrix} \qquad 4)\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a & a \\ 1 & a & a^2 & a^2 \\ 1 & a & a^2 & a^3 \end{vmatrix}$$

5 ★★ Soit $a,b,c \in \mathbb{R}$. Calculer les déterminants suivants sous *forme factorisée*, pour en déduire pour quelles valeurs des paramètres est-ce qu'ils sont nuls :

$$1)\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & b \\ 1 & a^2 & b^2 \end{vmatrix} \qquad 2)\ \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ a & 1 & b \\ a & b & 1 \end{vmatrix}$$

$$3)\ \begin{vmatrix} 1+a & a & a \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix} \qquad 4)\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos a & \cos b & \cos c \\ \sin a & \sin b & \sin c \end{vmatrix}$$

Astuce utile pour factoriser : pour le déterminant 2), si on ajoute les colonnes 2 et 3 à la première, on obtient une colonne remplie de $1+a+b$, ce qui permet de factoriser. Il ne reste alors plus que du a et du b dans les colonnes 2 et 3. Cette astuce peut aussi marcher avec les lignes.

6 ★★ (*Déterminants de taille n*) Calculer les déterminants de taille n suivants :

$$d_n = \begin{vmatrix} & & 0 & & 1 \\ 1 & 1 & & & 1 \\ 1 & & \ddots & & 1 \\ 1 & & & 1 & 1 \\ 1 & & 0 & & 1 \end{vmatrix}$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 3 & 1 & & & & 0 \\ 2 & 3 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 2 & 3 & 1 \\ 0 & & & & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b & b \\ b & a & b & & & b \\ b & b & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ b & & & b & a & b \\ b & b & \cdots & b & b & a \end{vmatrix} \quad \text{avec } a,b \in \mathbb{R}$$

$$\delta_n = \begin{vmatrix} 1 & b & & & 0 \\ a & 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 & b \\ 0 & & & a & 1 \end{vmatrix} \quad \text{avec } a,b \in \mathbb{R}$$

Le plus souvent, il faut chercher une relation de récurrence.

7 ★★★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$. Calculer le déterminant de Vandermonde :

$$V(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Commencer par calculer ce déterminant pour $n = 2$ et $n = 3$, en cherchant une forme factorisée.

Applications des déterminants

8 ★ En calculant un déterminant, vérifier si les vecteurs suivants forment une base de l'e.v. E donné :

1) $u_1 = (1+i, 1, i)$, $u_2 = (i, -1, 1-i)$, $u_3 = (2-i, 0, -i)$ avec $E = \mathbb{C}^3$.
2) $P_1 = 4X^2 + 3X - 1$, $P_2 = 2X^2 - 2X + 3$, $P_3 = 3X^2 + 2X - 4$, avec $E = \mathbb{R}_2[X]$.
3) $P_1 = X^2$, $P_2 = X(X-1)$, $P_3 = (X-1)^2$, avec $E = \mathbb{R}_2[X]$.
4) $u_1 = (\lambda + 3, 3\lambda + 1)$, $u_2 = (2\lambda + 3, 5\lambda + 4)$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $E = \mathbb{R}^2$.

9 ★★☆ Soit $\varphi : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ l'application linéaire définie par

$$\varphi(P) = P - \alpha X P'$$

1) Déterminer la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
2) Déterminer pour quelle(s) valeur(s) de α l'application φ est bijective.

10 ★★ Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ et soit f un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ défini par $f(M) = AM$.

1) Calculer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(f)$, avec $\mathcal{B}_c$ la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.
2) Montrer que $\det(f) = (\det A)^2$.
3) En déduire une CNS pour que f soit bijective.

11 ★★ (*Identité de Lagrange*) Soit $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. On souhaite montrer l'identité suivante :

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$$

Démontrer cette identité en calculant $\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c & -d \\ d & c \end{vmatrix}$ de deux façons.

A et B étant deux matrices, comment peut-on réécrire $\det(A)\det(B)$?

12 ★★☆ En utilisant les formules de Cramer, trouver les fonctions f et g de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ vérifiant, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} f(x)\cos x + g(x)\sin x = 0 \\ -f(x)\sin x + g(x)\cos x = \cos^3 x \end{cases}$$

Ne pas oublier de justifier qu'on puisse utiliser les formules de Cramer

Comatrice

13 ★★ Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\det(\mathrm{Com} A) = (\det A)^{n-1}$. Exploiter le seul théorème dont on dispose dans le cours sur les comatrices.

14 ★★

1) Montrer que $\mathrm{Com}(I_n) = I_n$.
2) Montrer que pour toutes matrices inversibles A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $\mathrm{Com}(AB) = \mathrm{Com}(A)\mathrm{Com}(B)$.

Exploiter le seul théorème dont on dispose dans le cours sur les comatrices.